2. 運動学

- 運動学（kinematics）：【力】の概念を考慮せずに済む範囲で、質点の運動を記述
- 座標系（3 次元）：質点の位置を指定
  - 直交座標 (x, y, z): $\boldsymbol{x} := x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_x := (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_y := (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_z := (0, 0, 1)$
  - 極座標 (r, θ, ϕ): $\boldsymbol{x} := r\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_r := (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$
  - 円筒座標 (r, ϕ, z): $\boldsymbol{x} := r\boldsymbol{e}_r + z\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_r := (\cos\phi, \sin\phi, 0)$, $\boldsymbol{e}_z := (0, 0, 1)$
- 微積分を用いた物理量の定義・対応関係
  - 変位：$\Delta\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}(t + \Delta t) - \boldsymbol{x}(t) := \int_t^{t+\Delta t} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t'$
  - 速度：$\boldsymbol{v}(t) := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}$
  - 加速度：$\boldsymbol{a}(t) := \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t^2}$
- 速度・加速度の極座標表示（2 次元、微積分で体系的に導出[*1]）
  - 位置ベクトル：$\boldsymbol{r} := r\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_r := (\cos\theta, \sin\theta)$, $\boldsymbol{e}_\theta := (-\sin\theta, \cos\theta)$
  - 速度ベクトル：$\boldsymbol{v} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta$, $v_r := \dot{r}$, $v_\theta := r\dot{\theta}$
  - 加速度ベクトル：$\boldsymbol{v} := \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta$, $a_r := \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta := r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

3. 運動の法則

- 力学の公理系（1 粒子）：運動量 $\boldsymbol{p} := m\boldsymbol{v}$ に対して、運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \tag{1}$$

が力学の公理系をなす。常微分の解の一意性より、力学の公理系は closed な方程式系をなす[*2]。

- 力学の公理系（多粒子）：複数の粒子がある時、作用・反作用の法則を課した 2 体相互作用の運動方程式に従う：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{p}_i}{m}, \quad \boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \tag{4}$$

これで closed な方程式系をなす。

4. 運動の積分

- 運動量保存則（作用・反作用の法則から導出される）：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{12}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = 0 \tag{5}$$

- エネルギー保存則（保存力の時）：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + U(\boldsymbol{x})\right) = 0. \tag{6}$$

$\boldsymbol{F} := (F_x, F_y, F_z)$ が保存力である必要十分条件は

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ for all } i \text{ and } j. \tag{7}$$

- 角運動量保存則（中心力の時）：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}f(r) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{L} := \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \text{const.} \tag{8}$$

- 1 次元系の運動はエネルギー保存則から解が求まる：

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + U(x) = E \quad \Longrightarrow \quad \pm\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}t + \text{const.} \tag{9}$$

[*1] 円筒座標でも同様のことは簡単にできる

[*2] 自由度に対して、方程式の数が釣り合っており、解が一意に定まっている。

- 常微分方程式の解の一意性（数学の定理）：K 次元のベクトルを考える（$\boldsymbol{X}(t) := (X_1(t), \ldots, X_K(t))$）。常微分方程式は、初期条件 $\boldsymbol{X}(0)$ を与えると、（特殊なケースを除いて[*3]）解が一意に定まる：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{C} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X}(t) \text{ が一意に決まる} \tag{2}$$

運動方程式 (1) は $\boldsymbol{X} := (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) := (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v})$ の形をしているため、初期条件として $\boldsymbol{X}(0) := (\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{x}(0))$ を与えると解が一意に定まる。

- 離散化して考えるとわかりやすい：次の漸化式は $\boldsymbol{X}_0 := \boldsymbol{X}(0)$ を与えると、解が自明に一意に決まる：

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_n)\Delta t, \quad \boldsymbol{X}_n := \boldsymbol{X}(n\Delta t), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

3〜6. 具体的な問題（振動・中心力など）

- 基本的にただ運動方程式を、微分方程式の初期値問題として解けばよい。但し、運動量保存則・角運動量保存則・エネルギー保存則を用いることで、方程式の次元を下げると、問題が解きやすくなる（というより、そうじゃないと 1 次元運動以外は解くのは難しい)。最終的に 1 次元運動に帰着できると嬉しい。
- 放物運動：空気抵抗を無視した問題・大気中の線型抵抗を考慮する問題・スカイダイビングの様な非線形抵抗を考慮する問題 $\Longrightarrow$ ただ 1 階微分方程式を解けばよい。変数分離とかで解ける。
- 振動：2 解線型微分方程式なので、$x(t) = Ce^{\lambda t}$ の形を仮定して、λ の性質を調べればよい。$\lambda =$ 純虚数なら単振動であり、そうでない場合は減衰振動（過減衰・臨界減衰の可能性もあり)。
- 3 次元系の中心力：角運動量保存則のおかげで、3 次元座標 (r, θ, ϕ) での運動が、実質的に r だけに関する 1 次元運動に帰着される。これを用いて解く。1 次元系なので、エネルギー保存則から $r(t)$ の解が求まる。
  - 特に逆二乗則 $U(r) = -mk_s/r$ の時は Kepler の惑星の問題。解が二次曲線なのでその極座標

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + \epsilon \cos\theta}, \quad \epsilon\text{は離心率} \tag{10}$$

  を意識して式変形すると楽。特に、$r(t)$ の代わりに $r(\theta)$ で表示すれば、$u(\theta) := 1/r(\theta)$ は綺麗な式になるだろう。そして逆二乗則の中心力の系では Laplace-Runge-Lenz ベクトルが保存：

$$\boldsymbol{M} := \frac{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}}{m} - \frac{mk_s}{r}\boldsymbol{r} = \text{const.} \tag{11}$$

7. 剛体の運動法則

- 剛体の自由度は 6 であり、重心座標 $\boldsymbol{r}_c := (r_x, r_y, r_z)$ と剛体の姿勢を表すオイラーの角 (θ, ϕ, ψ) が重要。
- 剛体の基礎方程式は重心の運動方程式と、重心に関する角運動量の時間発展方程式：

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{N}'_i. \tag{12}$$

  これで closed な方程式系をなす。但し、剛体を構成する質点 $(m_i, \boldsymbol{r}_i)$ に対して働く力を $\boldsymbol{F}_i$ と書いたとして、

$$\boldsymbol{r}_c := \frac{1}{M}\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i, \quad M := \sum_i m_i, \quad \boldsymbol{N}'_i := \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i. \tag{13}$$

- 固定軸の周りの回転運動（自由度=1）では、角運動量の時間発展方程式が単純になる。慣性モーメント I を用いて

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \boldsymbol{N}_i, \quad I := \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i^2. \tag{14}$$